数学Ⅱ・数学B

問　題	選　択　方　法
第1問	必　　答
第2問	必　　答
第3問	いずれか2問を選択し，解答しなさい。
第4問	
第5問	

第1問 （必答問題）（配点　30）

〔1〕

(1)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき

$$\sin\theta > \sqrt{3}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) \qquad \cdots\cdots ①$$

となる θ の値の範囲を求めよう。

加法定理を用いると

$$\sqrt{3}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}}\cos\theta + \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{イ}}}\sin\theta$$

である。よって，三角関数の合成を用いると，① は

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{\boxed{\text{エ}}}\right) < 0$$

と変形できる。したがって，求める範囲は

$$\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\pi < \theta < \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\pi$$

である。

（数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。）

(2) $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とし，k を実数とする。$\sin\theta$ と $\cos\theta$ は x の2次方程式 $25x^2 - 35x + k = 0$ の解であるとする。このとき，解と係数の関係により $\sin\theta + \cos\theta$ と $\sin\theta\cos\theta$ の値を考えれば，$k = \boxed{\text{ケコ}}$ であることがわかる。

さらに，θ が $\sin\theta \geqq \cos\theta$ を満たすとすると，$\sin\theta = \dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$，$\cos\theta = \dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。このとき，θ は $\boxed{\text{ソ}}$ を満たす。$\boxed{\text{ソ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ $0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{12}$　① $\dfrac{\pi}{12} \leqq \theta < \dfrac{\pi}{6}$　② $\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta < \dfrac{\pi}{4}$

③ $\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta < \dfrac{\pi}{3}$　④ $\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta < \dfrac{5}{12}\pi$　⑤ $\dfrac{5}{12}\pi \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$

（数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。）

〔2〕

(1) t は正の実数であり，$t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}} = -3$ を満たすとする。このとき

$$t^{\frac{2}{3}} + t^{-\frac{2}{3}} = \boxed{\text{タチ}}$$

である。さらに

$$t^{\frac{1}{3}} + t^{-\frac{1}{3}} = \sqrt{\boxed{\text{ツテ}}},\quad t - t^{-1} = \boxed{\text{トナニ}}$$

である。

(数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。)

(2) x, y は正の実数とする。連立不等式

$$\begin{cases} \log_3(x\sqrt{y}) \leqq 5 & \cdots\cdots ② \\ \log_{81}\dfrac{y}{x^3} \leqq 1 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

について考える。

$X = \log_3 x$, $Y = \log_3 y$ とおくと，② は

$$\boxed{\text{ヌ}}\,X + Y \leqq \boxed{\text{ネノ}} \qquad \cdots\cdots ④$$

と変形でき，③ は

$$\boxed{\text{ハ}}\,X - Y \geqq \boxed{\text{ヒフ}} \qquad \cdots\cdots ⑤$$

と変形できる。

X, Y が ④ と ⑤ を満たすとき，Y のとり得る最大の整数の値は $\boxed{\text{ヘ}}$ である。また，x, y が ②, ③ と $\log_3 y = \boxed{\text{ヘ}}$ を同時に満たすとき，x のとり得る最大の整数の値は $\boxed{\text{ホ}}$ である。

第2問 (必答問題) (配点 30)

$a>0$ とし，$f(x)=x^2-(4a-2)x+4a^2+1$ とおく。座標平面上で，放物線 $y=x^2+2x+1$ を C，放物線 $y=f(x)$ を D とする。また，ℓ を C と D の両方に接する直線とする。

(1) ℓ の方程式を求めよう。

ℓ と C は点 $(t,\ t^2+2t+1)$ において接するとすると，ℓ の方程式は

$$y=\left(\boxed{\text{ア}}\,t+\boxed{\text{イ}}\right)x-t^2+\boxed{\text{ウ}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

である。また，ℓ と D は点 $(s,\ f(s))$ において接するとすると，ℓ の方程式は

$$y=\left(\boxed{\text{エ}}\,s-\boxed{\text{オ}}\,a+\boxed{\text{カ}}\right)x$$
$$-s^2+\boxed{\text{キ}}\,a^2+\boxed{\text{ク}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

である。ここで，①と②は同じ直線を表しているので，$t=\boxed{\text{ケ}}$，$s=\boxed{\text{コ}}\,a$ が成り立つ。

したがって，ℓ の方程式は $y=\boxed{\text{サ}}\,x+\boxed{\text{シ}}$ である。

(数学Ⅱ・数学B第2問は次ページに続く。)

(2) 二つの放物線 C, D の交点の x 座標は $\boxed{\text{ス}}$ である。

C と直線 ℓ, および直線 $x = \boxed{\text{ス}}$ で囲まれた図形の面積を S とすると,

$$S = \frac{a^{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$ である。

(3) $a \geqq \dfrac{1}{2}$ とする。二つの放物線 C, D と直線 ℓ で囲まれた図形の中で $0 \leqq x \leqq 1$ を満たす部分の面積 T は, $a > \boxed{\text{タ}}$ のとき, a の値によらず

$$T = \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

であり, $\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq \boxed{\text{タ}}$ のとき

$$T = -\boxed{\text{テ}}a^3 + \boxed{\text{ト}}a^2 - \boxed{\text{ナ}}a + \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$$

である。

(4) 次に, (2), (3) で定めた S, T に対して, $U = 2T - 3S$ とおく。a が $\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq \boxed{\text{タ}}$ の範囲を動くとき, U は $a = \dfrac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}$ で最大値 $\dfrac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒフ}}}$ をとる。

第3問　（選択問題）（配点　20）

数列$\{a_n\}$は，初項a_1が0であり，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$のとき次の漸化式を満たすものとする。

$$a_{n+1}=\frac{n+3}{n+1}\{3a_n+3^{n+1}-(n+1)(n+2)\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

(1)　$a_2=\boxed{\text{ア}}$である。

(2)　$b_n=\dfrac{a_n}{3^n(n+1)(n+2)}$とおき，数列$\{b_n\}$の一般項を求めよう。

$\{b_n\}$の初項b_1は$\boxed{\text{イ}}$である。①の両辺を$3^{n+1}(n+2)(n+3)$で割ると

$$b_{n+1}=b_n+\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\left(n+\boxed{\text{エ}}\right)\left(n+\boxed{\text{オ}}\right)}-\left(\frac{1}{\boxed{\text{カ}}}\right)^{n+1}$$

を得る。ただし，$\boxed{\text{エ}}<\boxed{\text{オ}}$とする。

したがって

$$b_{n+1}-b_n=\left(\frac{\boxed{\text{キ}}}{n+\boxed{\text{エ}}}-\frac{\boxed{\text{キ}}}{n+\boxed{\text{オ}}}\right)-\left(\frac{1}{\boxed{\text{カ}}}\right)^{n+1}$$

である。

（数学Ⅱ・数学B第3問は次ページに続く。）

n を 2 以上の自然数とするとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\boxed{\text{キ}}}{k+\boxed{\text{エ}}}-\frac{\boxed{\text{キ}}}{k+\boxed{\text{オ}}}\right)=\frac{1}{\boxed{\text{ク}}}\left(\frac{n-\boxed{\text{ケ}}}{n+\boxed{\text{コ}}}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\boxed{\text{カ}}}\right)^{k+1}=\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}-\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\left(\frac{1}{\boxed{\text{カ}}}\right)^{n}$$

が成り立つことを利用すると

$$b_n=\frac{n-\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}\left(n+\boxed{\text{チ}}\right)}+\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\left(\frac{1}{\boxed{\text{カ}}}\right)^{n}$$

が得られる。これは $n=1$ のときも成り立つ。

(3) (2) により，$\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=\boxed{\text{ツ}}^{\,n-\boxed{\text{テ}}}\left(n^2-\boxed{\text{ト}}\right)+\frac{\left(n+\boxed{\text{ナ}}\right)\left(n+\boxed{\text{ニ}}\right)}{\boxed{\text{ヌ}}}$$

で与えられる。ただし，$\boxed{\text{ナ}}<\boxed{\text{ニ}}$ とする。

このことから，すべての自然数 n について，a_n は整数となることがわかる。

(4) k を自然数とする。a_{3k}，a_{3k+1}，a_{3k+2} を 3 で割った余りはそれぞれ $\boxed{\text{ネ}}$，$\boxed{\text{ノ}}$，$\boxed{\text{ハ}}$ である。また，$\{a_n\}$ の初項から第 2020 項までの和を 3 で割った余りは $\boxed{\text{ヒ}}$ である。

第4問（選択問題）（配点　20）

点Oを原点とする座標空間に2点

$$A(3,\ 3,\ -6),\quad B(2+2\sqrt{3},\ 2-2\sqrt{3},\ -4)$$

をとる。3点O，A，Bの定める平面をαとする。また，αに含まれる点Cは

$$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OC},\quad \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=24 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を満たすとする。

(1)　$|\overrightarrow{OA}|=\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$，$|\overrightarrow{OB}|=\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$であり，

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\boxed{\text{オカ}}$である。

(2)　点Cは平面α上にあるので，実数s，tを用いて，$\overrightarrow{OC}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$と表すことができる。このとき，①から$s=\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$，$t=\boxed{\text{コ}}$である。したがって，$|\overrightarrow{OC}|=\boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}$である。

（数学Ⅱ・数学B第4問は次ページに続く。）

(3) $\overrightarrow{\mathrm{CB}} = \left(\boxed{ス},\ \boxed{セ},\ \boxed{ソタ}\right)$である。したがって，平面$\alpha$上の四角形OABCは$\boxed{チ}$。$\boxed{チ}$に当てはまるものを，次の⓪〜④のうちから一つ選べ。ただし，少なくとも一組の対辺が平行な四角形を台形という。

⓪ 正方形である
① 正方形ではないが，長方形である
② 長方形ではないが，平行四辺形である
③ 平行四辺形ではないが，台形である
④ 台形ではない

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OC}}$であるので，四角形OABCの面積は$\boxed{ツテ}$である。

(4) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OD}} = 2\sqrt{6}$かつ$z$座標が1であるような点Dの座標は

$$\left(\boxed{ト} + \frac{\sqrt{\boxed{ナ}}}{\boxed{ニ}},\ \boxed{ヌ} - \frac{\sqrt{\boxed{ネ}}}{\boxed{ノ}},\ 1\right)$$

である。このとき$\angle\mathrm{COD} = \boxed{ハヒ}^\circ$である。

3点O，C，Dの定める平面をβとする。αとβは垂直であるので，三角形ABCを底面とする四面体DABCの高さは$\sqrt{\boxed{フ}}$である。したがって，四面体DABCの体積は$\boxed{ヘ}\sqrt{\boxed{ホ}}$である。