# 数学Ⅱ・数学B

| 問　題 | 選　択　方　法 |
|---|---|
| **第1問** | 必　　答 |
| **第2問** | 必　　答 |
| **第3問** | いずれか2問を選択し，解答しなさい。 |
| **第4問** | |
| **第5問** | |

# 第１問 （必答問題）（配点　30）

〔1〕

(1) 次の**問題A**について考えよう。

> **問題A**　関数 $y = \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の最大値を求めよ。

$$\sin\frac{\pi}{\boxed{\text{ア}}} = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos\frac{\pi}{\boxed{\text{ア}}} = \frac{1}{2}$$

であるから，三角関数の合成により

$$y = \boxed{\text{イ}}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{\boxed{\text{ア}}}\right)$$

と変形できる。よって，$y$ は $\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{ウ}}}$ で最大値 $\boxed{\text{エ}}$ をとる。

(2) $p$ を定数とし，次の**問題B**について考えよう。

> **問題B**　関数 $y = \sin\theta + p\cos\theta \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の最大値を求めよ。

(i) $p = 0$ のとき，$y$ は $\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{オ}}}$ で最大値 $\boxed{\text{カ}}$ をとる。

（数学Ⅱ・数学B第１問は次ページに続く。）

(ii) $p > 0$ のときは，加法定理

$$\cos(\theta - \alpha) = \cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha$$

を用いると

$$y = \sin\theta + p\cos\theta = \sqrt{\boxed{キ}}\cos(\theta - \alpha)$$

と表すことができる。ただし，$\alpha$ は

$$\sin\alpha = \frac{\boxed{ク}}{\sqrt{\boxed{キ}}},\quad \cos\alpha = \frac{\boxed{ケ}}{\sqrt{\boxed{キ}}},\quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

を満たすものとする。このとき，$y$ は $\theta = \boxed{コ}$ で最大値 $\sqrt{\boxed{サ}}$ をとる。

(iii) $p < 0$ のとき，$y$ は $\theta = \boxed{シ}$ で最大値 $\boxed{ス}$ をとる。

$\boxed{キ}$ ～ $\boxed{ケ}$，$\boxed{サ}$，$\boxed{ス}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

| | | |
|---|---|---|
| ⓪ $-1$ | ① $1$ | ② $-p$ |
| ③ $p$ | ④ $1-p$ | ⑤ $1+p$ |
| ⑥ $-p^2$ | ⑦ $p^2$ | ⑧ $1-p^2$ |
| ⑨ $1+p^2$ | ⓐ $(1-p)^2$ | ⓑ $(1+p)^2$ |

$\boxed{コ}$，$\boxed{シ}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

| | | |
|---|---|---|
| ⓪ $0$ | ① $\alpha$ | ② $\frac{\pi}{2}$ |

(数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。)

〔2〕 二つの関数 $f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}$，$g(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}$ について考える。

(1) $f(0)=\boxed{\text{セ}}$，$g(0)=\boxed{\text{ソ}}$ である。また，$f(x)$ は相加平均と相乗平均の関係から，$x=\boxed{\text{タ}}$ で最小値 $\boxed{\text{チ}}$ をとる。

$g(x)=-2$ となる $x$ の値は $\log_2\left(\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}-\boxed{\text{テ}}\right)$ である。

(2) 次の ①～④ は，$x$ にどのような値を代入してもつねに成り立つ。

$f(-x)=\boxed{\text{ト}}$ ………………………… ①

$g(-x)=\boxed{\text{ナ}}$ ………………………… ②

$\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=\boxed{\text{ニ}}$ ………………………… ③

$g(2x)=\boxed{\text{ヌ}}f(x)g(x)$ ………………………… ④

$\boxed{\text{ト}}$，$\boxed{\text{ナ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

| | | | |
|---|---|---|---|
| ⓪ $f(x)$ | ① $-f(x)$ | ② $g(x)$ | ③ $-g(x)$ |

（数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。）

(3) 花子さんと太郎さんは，$f(x)$ と $g(x)$ の性質について話している。

花子：①〜④ は三角関数の性質に似ているね。

太郎：三角関数の加法定理に類似した式(A)〜(D)を考えてみたけど，つねに成り立つ式はあるだろうか。

花子：成り立たない式を見つけるために，式(A)〜(D)の $\beta$ に何か具体的な値を代入して調べてみたらどうかな。

**太郎さんが考えた式**

$$f(\alpha-\beta)=f(\alpha)g(\beta)+g(\alpha)f(\beta) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(A)}$$

$$f(\alpha+\beta)=f(\alpha)f(\beta)+g(\alpha)g(\beta) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(B)}$$

$$g(\alpha-\beta)=f(\alpha)f(\beta)+g(\alpha)g(\beta) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(C)}$$

$$g(\alpha+\beta)=f(\alpha)g(\beta)-g(\alpha)f(\beta) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(D)}$$

(1)，(2)で示されたことのいくつかを利用すると，式(A)〜(D)のうち，$\boxed{\text{ネ}}$ 以外の三つは成り立たないことがわかる。$\boxed{\text{ネ}}$ は左辺と右辺をそれぞれ計算することによって成り立つことが確かめられる。

$\boxed{\text{ネ}}$ の解答群

| | | | |
|---|---|---|---|
| ⓪ (A) | ① (B) | ② (C) | ③ (D) |

## 第2問 （必答問題）（配点　30）

(1)　座標平面上で，次の二つの2次関数のグラフについて考える。

$y = 3x^2 + 2x + 3$ ………………………… ①

$y = 2x^2 + 2x + 3$ ………………………… ②

①，②の2次関数のグラフには次の**共通点**がある。

**共通点**

- $y$ 軸との交点の $y$ 座標は $\boxed{\text{ア}}$ である。
- $y$ 軸との交点における接線の方程式は $y = \boxed{\text{イ}}\,x + \boxed{\text{ウ}}$ である。

次の⓪～⑤の2次関数のグラフのうち，$y$ 軸との交点における接線の方程式が $y = \boxed{\text{イ}}\,x + \boxed{\text{ウ}}$ となるものは $\boxed{\text{エ}}$ である。

$\boxed{\text{エ}}$ の解答群

| | |
|---|---|
| ⓪ $y = 3x^2 - 2x - 3$ | ① $y = -3x^2 + 2x - 3$ |
| ② $y = 2x^2 + 2x - 3$ | ③ $y = 2x^2 - 2x + 3$ |
| ④ $y = -x^2 + 2x + 3$ | ⑤ $y = -x^2 - 2x + 3$ |

$a$，$b$，$c$ を0でない実数とする。

曲線 $y = ax^2 + bx + c$ 上の点 $\left(0,\ \boxed{\text{オ}}\right)$ における接線を $\ell$ とすると，その方程式は $y = \boxed{\text{カ}}\,x + \boxed{\text{キ}}$ である。

（数学Ⅱ・数学B第2問は次ページに続く。）

接線 $\ell$ と $x$ 軸との交点の $x$ 座標は $\dfrac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。

$a$，$b$，$c$ が正の実数であるとき，曲線 $y = ax^2 + bx + c$ と接線 $\ell$ および直線 $x = \dfrac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ で囲まれた図形の面積を $S$ とすると

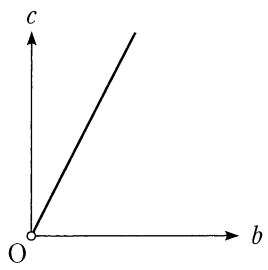
$$S = \frac{ac^{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}\,b^{\boxed{\text{ス}}}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

である。

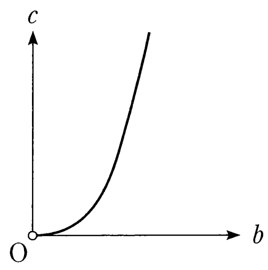
③において，$a = 1$ とし，$S$ の値が一定となるように正の実数 $b$，$c$ の値を変化させる。このとき，$b$ と $c$ の関係を表すグラフの概形は $\boxed{\text{セ}}$ である。

$\boxed{\text{セ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

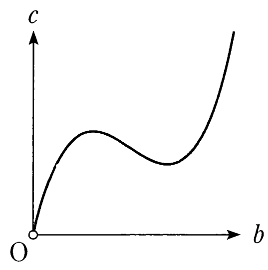
⓪



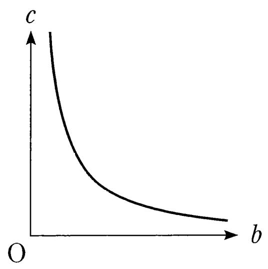

①



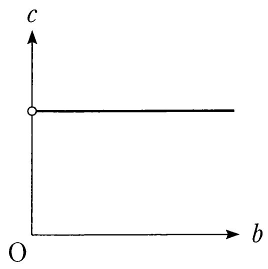

②



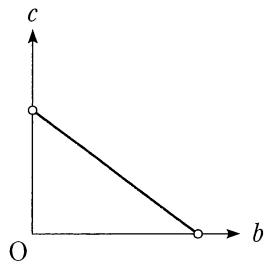

③




④




⑤




（数学Ⅱ・数学B第2問は次ページに続く。）

(2) 座標平面上で，次の三つの3次関数のグラフについて考える。

$y = 4x^3 + 2x^2 + 3x + 5$ ………………………… ④

$y = -2x^3 + 7x^2 + 3x + 5$ ………………………… ⑤

$y = 5x^3 - x^2 + 3x + 5$ ………………………… ⑥

④，⑤，⑥ の3次関数のグラフには次の**共通点**がある。

**共通点**

- $y$ 軸との交点の $y$ 座標は $\boxed{\text{ソ}}$ である。
- $y$ 軸との交点における接線の方程式は $y = \boxed{\text{タ}}\,x + \boxed{\text{チ}}$ である。

$a$，$b$，$c$，$d$ を0でない実数とする。

曲線 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 上の点 $\left(0,\ \boxed{\text{ツ}}\right)$ における接線の方程式は $y = \boxed{\text{テ}}\,x + \boxed{\text{ト}}$ である。

(数学Ⅱ・数学B第2問は次ページに続く。)

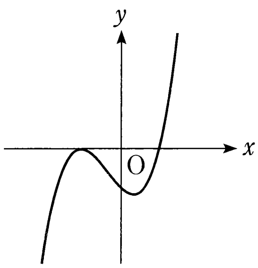
次に，$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，$g(x)=\boxed{\text{テ}}\,x+\boxed{\text{ト}}$ とし，$f(x)-g(x)$ について考える。

$h(x)=f(x)-g(x)$ とおく。$a$，$b$，$c$，$d$ が正の実数であるとき，$y=h(x)$ のグラフの概形は $\boxed{\text{ナ}}$ である。

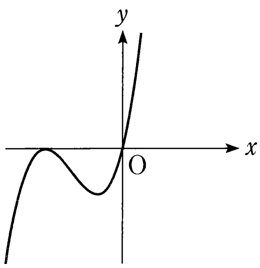
$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフの共有点の $x$ 座標は $\dfrac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ と $\boxed{\text{ノ}}$ である。また，$x$ が $\dfrac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ と $\boxed{\text{ノ}}$ の間を動くとき，$|f(x)-g(x)|$ の値が最大となるのは，$x=\dfrac{\boxed{\text{ハヒフ}}}{\boxed{\text{ヘホ}}}$ のときである。

$\boxed{\text{ナ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

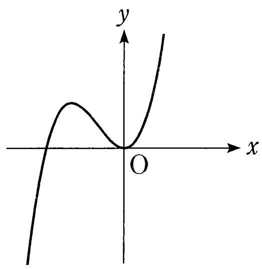
⓪



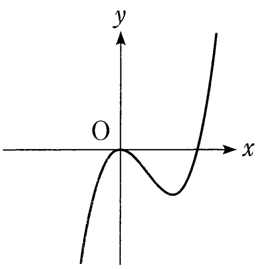

①



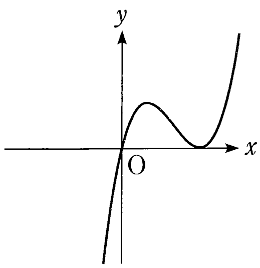

②



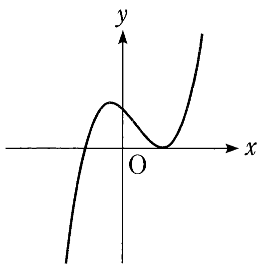

③




④




⑤



## 第4問　（選択問題）（配点　20）

初項3，公差$p$の等差数列を$\{a_n\}$とし，初項3，公比$r$の等比数列を$\{b_n\}$とする。ただし，$p \neq 0$かつ$r \neq 0$とする。さらに，これらの数列が次を満たすとする。

$$a_n b_{n+1} - 2a_{n+1}b_n + 3b_{n+1} = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \cdots\cdots ①$$

(1)　$p$と$r$の値を求めよう。自然数$n$について，$a_n$，$a_{n+1}$，$b_n$はそれぞれ

$$a_n = \boxed{\text{ア}} + (n-1)p \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

$$a_{n+1} = \boxed{\text{ア}} + np \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

$$b_n = \boxed{\text{イ}}\, r^{n-1}$$

と表される。$r \neq 0$により，すべての自然数$n$について，$b_n \neq 0$となる。

$\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = r$であることから，①の両辺を$b_n$で割ることにより

$$\boxed{\text{ウ}}\, a_{n+1} = r\left(a_n + \boxed{\text{エ}}\right) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

が成り立つことがわかる。④に②と③を代入すると

$$\left(r - \boxed{\text{オ}}\right)pn = r\left(p - \boxed{\text{カ}}\right) + \boxed{\text{キ}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

となる。⑤がすべての$n$で成り立つことおよび$p \neq 0$により，$r = \boxed{\text{オ}}$を得る。さらに，このことから，$p = \boxed{\text{ク}}$を得る。

以上から，すべての自然数$n$について，$a_n$と$b_n$が正であることもわかる。

（数学Ⅱ・数学B第4問は次ページに続く。）

(2)　$p = \boxed{\text{ク}}$，$r = \boxed{\text{オ}}$ であることから，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の初項から第 $n$ 項までの和は，それぞれ次の式で与えられる。

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\, n\left(n + \boxed{\text{サ}}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \boxed{\text{シ}}\left(\boxed{\text{オ}}^{\,n} - \boxed{\text{ス}}\right)$$

(3)　数列 $\{a_n\}$ に対して，初項 3 の数列 $\{c_n\}$ が次を満たすとする。

$$a_n c_{n+1} - 4\,a_{n+1} c_n + 3\,c_{n+1} = 0 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \quad \cdots\cdots\cdots ⑥$$

$a_n$ が正であることから，⑥ を変形して，$c_{n+1} = \dfrac{\boxed{\text{セ}}\, a_{n+1}}{a_n + \boxed{\text{ソ}}}\, c_n$ を得る。

さらに，$p = \boxed{\text{ク}}$ であることから，数列 $\{c_n\}$ は $\boxed{\text{タ}}$ ことがわかる。

$\boxed{\text{タ}}$ の解答群

| |
|---|
| ⓪　すべての項が同じ値をとる数列である |
| ①　公差が 0 でない等差数列である |
| ②　公比が 1 より大きい等比数列である |
| ③　公比が 1 より小さい等比数列である |
| ④　等差数列でも等比数列でもない |

(4)　$q$，$u$ は定数で，$q \neq 0$ とする。数列 $\{b_n\}$ に対して，初項 3 の数列 $\{d_n\}$ が次を満たすとする。

$$d_n b_{n+1} - q d_{n+1} b_n + u b_{n+1} = 0 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \quad \cdots\cdots\cdots ⑦$$

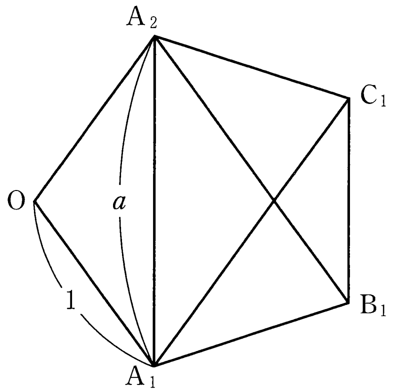
$r = \boxed{\text{オ}}$ であることから，⑦ を変形して，$d_{n+1} = \dfrac{\boxed{\text{チ}}}{q}(d_n + u)$

を得る。したがって，数列 $\{d_n\}$ が，公比が 0 より大きく 1 より小さい等比数列となるための必要十分条件は，$q > \boxed{\text{ツ}}$ かつ $u = \boxed{\text{テ}}$ である。

# 第5問　（選択問題）（配点　20）

1辺の長さが1の正五角形の対角線の長さを $a$ とする。

(1)　1辺の長さが1の正五角形 $OA_1B_1C_1A_2$ を考える。




$\angle A_1C_1B_1 = \boxed{\text{アイ}}^\circ$，$\angle C_1A_1A_2 = \boxed{\text{アイ}}^\circ$ となることから，$\overrightarrow{A_1A_2}$ と $\overrightarrow{B_1C_1}$ は平行である。ゆえに

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \boxed{\text{ウ}}\,\overrightarrow{B_1C_1}$$

であるから

$$\overrightarrow{B_1C_1} = \frac{1}{\boxed{\text{ウ}}}\overrightarrow{A_1A_2} = \frac{1}{\boxed{\text{ウ}}}\left(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}\right)$$

また，$\overrightarrow{OA_1}$ と $\overrightarrow{A_2B_1}$ は平行で，さらに，$\overrightarrow{OA_2}$ と $\overrightarrow{A_1C_1}$ も平行であることから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B_1C_1} &= \overrightarrow{B_1A_2} + \overrightarrow{A_2O} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1C_1}\\ &= -\boxed{\text{ウ}}\,\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_1} + \boxed{\text{ウ}}\,\overrightarrow{OA_2}\\ &= \left(\boxed{\text{エ}} - \boxed{\text{オ}}\right)\left(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}\right)\end{aligned}$$

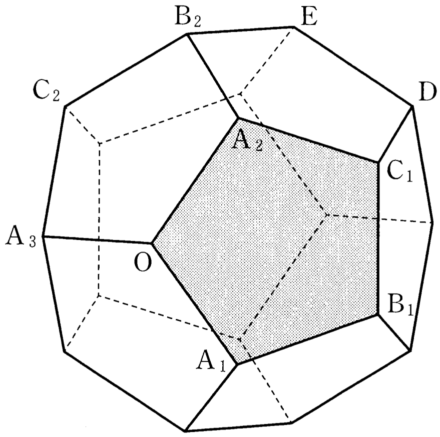
となる。したがって

$$\frac{1}{\boxed{\text{ウ}}} = \boxed{\text{エ}} - \boxed{\text{オ}}$$

が成り立つ。$a > 0$ に注意してこれを解くと，$a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ を得る。

（数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。）

(2) 下の図のような，1辺の長さが1の正十二面体を考える。正十二面体とは，どの面もすべて合同な正五角形であり，どの頂点にも三つの面が集まっているへこみのない多面体のことである。




面 $OA_1B_1C_1A_2$ に着目する。$\overrightarrow{OA_1}$ と $\overrightarrow{A_2B_1}$ が平行であることから

$$\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{A_2B_1} = \overrightarrow{OA_2} + \boxed{\text{ウ}}\,\overrightarrow{OA_1}$$

である。また

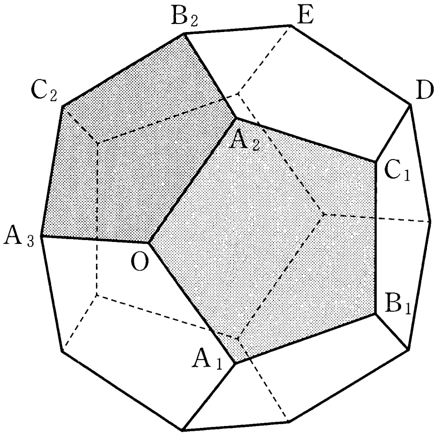
$$\left|\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}\right|^2 = \left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|^2 = \frac{\boxed{\text{カ}} + \sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

に注意すると

$$\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA_2} = \frac{\boxed{\text{ケ}} - \sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

を得る。

(数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。)




次に，面 $OA_2B_2C_2A_3$ に着目すると

$$\overrightarrow{OB_2} = \overrightarrow{OA_3} + \boxed{\text{ウ}}\,\overrightarrow{OA_2}$$

である。さらに

$$\overrightarrow{OA_2}\cdot\overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OA_3}\cdot\overrightarrow{OA_1} = \frac{\boxed{\text{ケ}} - \sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

が成り立つことがわかる。ゆえに

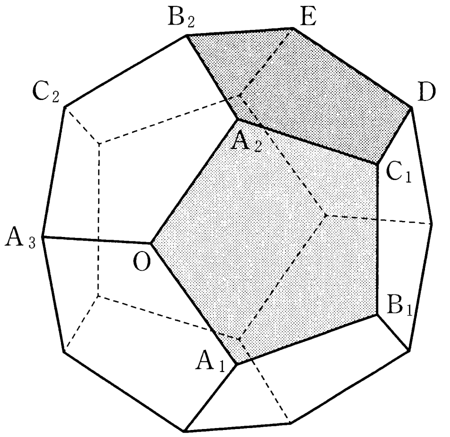
$$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OB_2} = \boxed{\text{シ}},\quad \overrightarrow{OB_1}\cdot\overrightarrow{OB_2} = \boxed{\text{ス}}$$

である。

$\boxed{\text{シ}}$，$\boxed{\text{ス}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

| | | | |
|---|---|---|---|
| ⓪ $0$ | ① $1$ | ② $-1$ | ③ $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ |
| ④ $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ | ⑤ $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ | ⑥ $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ | ⑦ $-\dfrac{1}{2}$ |
| ⑧ $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ | ⑨ $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$ | | |

(数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。)




最後に，面 $A_2C_1DEB_2$ に着目する。

$$\overrightarrow{B_2D} = \boxed{\text{ウ}}\,\overrightarrow{A_2C_1} = \overrightarrow{OB_1}$$

であることに注意すると，4点 O，$B_1$，D，$B_2$ は同一平面上にあり，四角形 $OB_1DB_2$ は $\boxed{\text{セ}}$ ことがわかる。

$\boxed{\text{セ}}$ の解答群

| | |
|---|---|
| ⓪ | 正方形である |
| ① | 正方形ではないが，長方形である |
| ② | 正方形ではないが，ひし形である |
| ③ | 長方形でもひし形でもないが，平行四辺形である |
| ④ | 平行四辺形ではないが，台形である |
| ⑤ | 台形でない |

ただし，少なくとも一組の対辺が平行な四角形を台形という。